

Ημερομηνία: 4 Ιουνίου 2022

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 30

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 22

A3. α. Λάθος β. Σωστό γ. Σωστό
δ. Λάθος ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12$, $x \in \mathbb{R}$

B2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, επομένως: $f'(1) = 0$

$$\text{Είναι } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 2a - 12 = 0 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$$

B3. Για $a = 3$ είναι $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$ και $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$

$$\text{Λύνουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 1$$

$$\text{και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 1$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$, το $f(-2) = 22$

και τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ το $f(1) = 3$.

B4. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x^2 + x - 2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 6(x+2) = 6 \cdot 3 = 18$$

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)		v_3	
[20, 24)		5	
Σύνολο			

Οι κεντρικές τιμές των δύο τελευταίων κλάσεων είναι $x_3 = \frac{16+20}{2} = 18$ και $x_4 = \frac{20+24}{2} = 22$

Γ1. Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων έχουμε:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{5} \Leftrightarrow 14 = \frac{200 + 210 + 18v_3 + 110}{40 + v_3} \\ \Leftrightarrow 14(40 + v_3) &= 520 + 18v_3 \Leftrightarrow 560 + 14v_3 = 520 + 18v_3 \\ \Leftrightarrow 4v_3 &= 40 \Leftrightarrow v_3 = 10\end{aligned}$$

Γ2. Το μέγεθος του δείγματος είναι: $N = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 50$

και για το άθροισμα είναι $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = \bar{x} \cdot N = 700$. Οπότε ο πίνακας γίνεται:

	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	5	110
Σύνολο		50	700

Γ3. Για τον υπολογισμό της διακύμανσης έχουμε:

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{50} [(x_1 - \bar{x})^2 v_1 + \dots + (x_5 - \bar{x})^2 v_5] \\ \Leftrightarrow s^2 &= \frac{1}{50} ((10 - 14)^2 \cdot 20 + (14 - 14)^2 \cdot 15 + (18 - 14)^2 \cdot 10 + (22 - 14)^2 \cdot 5) \\ \Leftrightarrow s^2 &= \frac{1}{50} \cdot 800 \\ \Leftrightarrow s^2 &= 16\end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Γ4. Είναι: $s = 4$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι :

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$$

Πράγματι

$$\frac{2}{7} = \frac{20}{70} > \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

Άρα το δείγμα **δεν είναι ομοιογενές**.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f ορίζεται για $x \neq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = (-x^{-2})' \Leftrightarrow f'(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Για $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και για $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

Δ2. Έχουμε:

$$-4 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 16 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{16}$$

$$\text{ή} \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Δ3. Για την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχουμε: $f(1) = -1$ και $f'(1) = 2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 3$$

Δ4. Τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ ανήκουν στην ευθεία $y = 2x - 3$ και ισχύει:

$\bar{x} = 4$ και $s_x = 2$, οπότε, σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει ότι

$$\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 8 - 3 = 5 \text{ και } s_y = s = 2.$$

Τελικά για το συντελεστή μεταβολής του δείγματος των τεταγμένων έχουμε:

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!